解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3$

(2)　$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 2a_n$

(3)　$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 2n$

(4)　$a_1 = 5,\quad a_{n+1} = a_n - 2$

(5)　$a_1 = -1,\quad a_{n+1} = -3a_n$

(6)　$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3^n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3$

公差が 3 の等差数列であるから

$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$

$\quad = 3n - 1$

(2) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 2a_n$

公比が 2 の等比数列であるから

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

(3) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 2n$

階差数列の一般項が $2n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= 1 + n^2 - n = n^2 - n + 1$$

$n = 1$ とすると $1^2 - 1 + 1 = 1$ であり，$a_1 = 1$ と一致する。

よって $\boldsymbol{a_n = n^2 - n + 1}$

(4) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} = a_n - 2$

公差が -2 の等差数列であるから

$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-2)$

$\quad = -2n + 7$

(5) $a_1 = -1,\quad a_{n+1} = -3a_n$

公比が -3 の等比数列であるから

$a_n = -1\cdot(-3)^{n-1}$

$\quad = -(-3)^{n-1}$

(6) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3^n$

階差数列の一般項が 3^n であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 2 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= 2 + \frac{3^n - 3}{2} = \frac{3^n + 1}{2}$$

$n = 1$ とすると $(3+1)/2 = 2$ であり，$a_1 = 2$ と一致する。

よって $\boldsymbol{a_n = \frac{3^n+1}{2}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$ 　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$ 　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 4$

(2) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} = 2a_n$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 5^n$

(4) $a_1 = 7,\quad a_{n+1} = a_n - 4$

(5) $a_1 = 4,\quad a_{n+1} + 2a_n = 0$

(6) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4$

公差が 4 の等差数列であるから

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$

$\quad = 4n - 1$

(2) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n$

公比が 2 の等比数列であるから

$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 5^n$

階差数列の一般項が 5^n であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 5^k = 2 + \frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$

$$= 2 + \frac{5^n - 5}{4} = \frac{5^n + 3}{4}$$

$n = 1$ とすると $(5+3)/4 = 2$ であり，$a_1 = 2$ と一致する。

よって $\boldsymbol{a_n = \frac{5^n+3}{4}}$

(4) $a_1 = 7, \quad a_{n+1} = a_n - 4$

公差が -4 の等差数列であるから

$a_n = 7 + (n-1) \cdot (-4)$

$\quad = -4n + 11$

(5) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} + 2a_n = 0$

変形すると $a_{n+1} = -2a_n$

公比が -2 の等比数列であるから

$a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$

変形すると $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$

階差数列の一般項が $2 \cdot 3^n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^k = 3 + \frac{2 \cdot 3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$= 3 + 3(3^{n-1} - 1) = 3^n$$

$n = 1$ とすると $3^1 = 3$ であり，$a_1 = 3$ と一致する。

よって $\boldsymbol{a_n = 3^n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本3パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 4$

(2)　$a_1 = 6,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

(3)　$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + (2n-1)$

(4)　$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + n^2$

(5)　$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

(6)　$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 5^n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4$

公差が 4 の等差数列であるから

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 1$$

(2) $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + (2n-1)$

階差数列が $2n-1$。$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 2 + 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)$$
$$= 2 + n^2 - n - n + 1 = n^2 - 2n + 3$$

$n = 1$ のとき一致する。 よって $\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 3}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n^2$

階差数列が n^2。$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$= 1 + \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n)$$

$n = 1$ のとき一致。 よって $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)}$

(5) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 3 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$= 3 + 2^n - 2 = 2^n + 1$$

$n = 1$ のとき一致。 よって $\boldsymbol{a_n = 2^n + 1}$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 5^n$

階差数列が 5^n。$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5^k = 1 + \frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$
$$= 1 + \frac{5^n - 5}{4} = \frac{5^n - 1}{4}$$

$n = 1$ のとき一致。 よって $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{4}(5^n - 1)}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_{n+1} = a_n - 4,\quad a_1 = 10$

(2) $a_{n+1} = -2a_n,\quad a_1 = 3$

(3) $a_{n+1} = a_n + 6n + 2,\quad a_1 = 1$

(4) $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^{n-1},\quad a_1 = 1$

(5) $a_{n+1} = a_n + n(n+1),\quad a_1 = 1$

(6) $a_{n+1} - 4a_n = 0,\quad a_1 = 2$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

漸化式の基本 3 パターン

漸化式の形を見て，どの数列になるかを見抜こう。

- ① **等差数列型：** $a_{n+1} = a_n + d$　(d は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公差 d の等差数列
- ② **等比数列型：** $a_{n+1} = ra_n$　(r は定数)
  $\Rightarrow$ 初項 a_1, 公比 r の等比数列
- ③ **階差数列型：** $a_{n+1} = a_n + f(n)$　($f(n)$ は n の式)
  $\Rightarrow$ $f(n)$ が階差数列 b_n となる。
  $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_{n+1} = a_n - 4, \quad a_1 = 10$

公差が -4 の等差数列であるから

$a_n = 10 + (n-1)\cdot(-4)$

$= -4n + 14$

(2) $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 3$

公比が -2 の等比数列であるから

$a_n = 3\cdot(-2)^{n-1}$

(3) $a_{n+1} = a_n + 6n + 2, \quad a_1 = 1$

階差数列が $6n+2$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+2) = 1 + 6\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 2(n-1)$

$= 1 + 3n^2 - 3n + 2n - 2 = 3n^2 - n - 1$

$n=1$ のとき一致。 よって $\boldsymbol{a_n = 3n^2 - n - 1}$

(4) $a_{n+1} = a_n + 2\cdot 3^{n-1}, \quad a_1 = 1$

階差数列が $2\cdot 3^{n-1}$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1} = 1 + \frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$= 1 + 3^{n-1} - 1 = 3^{n-1}$

$n=1$ のとき一致。 よって $\boldsymbol{a_n = 3^{n-1}}$

(5) $a_{n+1} = a_n + n(n+1), \quad a_1 = 1$

階差数列が n^2+n。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k) = 1 + \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

$= \frac{1}{3}(n^3-n) + 1$

※ $\sum k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ の利用。

$n=1$ のとき一致。 よって $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 1}$

(6) $a_{n+1} - 4a_n = 0, \quad a_1 = 2$

変形すると $a_{n+1} = 4a_n$

公比が 4 の等比数列であるから

$a_n = 2\cdot 4^{n-1}$

$= 2\cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1}$ としてもよい。

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ 例題

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2$

(3) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3$

(5) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$

(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n + 3$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ **例題**

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha + 1$ を解くと $\alpha = -1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は，初項 $a_1 + 1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^n - 1}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 2$ を解くと $\alpha = 1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は，初項 $a_1 - 1 = 1$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n - 1 = 1 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3^{n-1} + 1}$

(3) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha - 3$ を解くと $\alpha = 3$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

数列 $\{a_n - 3\}$ は，初項 $a_1 - 3 = 1$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n - 3 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^{n-1} + 3}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3$

特性方程式 $\alpha = 4\alpha + 3$ を解くと $\alpha = -1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は，初項 $a_1 + 1 = 2$，公比 4 の等比数列であるから

$a_n + 1 = 2 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1}$

(5) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 4$ を解くと $\alpha = -2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

数列 $\{a_n + 2\}$ は，初項 $a_1 + 2 = 0$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n + 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -2}$

(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n + 3$

特性方程式 $\alpha = -2\alpha + 3$ を解くと $\alpha = 1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は，初項 $a_1 - 1 = 2$，公比 -2 の等比数列であるから

$a_n - 1 = 2 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 1 - (-2)^n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ 例題

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

(2) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n + 9$

(5) $a_1 = -3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

(6) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -a_n + 2$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ **例題**

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 2$ を解くと $\alpha = -1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は，初項 $a_1 + 1 = 3$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3^n - 1}$

(2) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha + 4$ を解くと $\alpha = -4$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$$

数列 $\{a_n + 4\}$ は，初項 $a_1 + 4 = 9$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n + 4 = 9 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 9 \cdot 2^{n-1} - 4}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

特性方程式 $\alpha = 4\alpha - 6$ を解くと $\alpha = 2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は，初項 $a_1 - 2 = -1$，公比 4 の等比数列であるから

$a_n - 2 = -1 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 - 4^{n-1}}$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n + 9$

特性方程式 $\alpha = -2\alpha + 9$ を解くと $\alpha = 3$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 3 = -2(a_n - 3)$$

数列 $\{a_n - 3\}$ は，初項 $a_1 - 3 = 0$，公比 -2 の等比数列であるから

$a_n - 3 = 0$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3}$

(5) $a_1 = -3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ を解くと $\alpha = 2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は，初項 $a_1 - 2 = -5$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n - 2 = -5 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 - 5 \cdot 3^{n-1}}$

(6) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -a_n + 2$

特性方程式 $\alpha = -\alpha + 2$ を解くと $\alpha = 1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は，初項 $a_1 - 1 = -1$，公比 -1 の等比数列であるから

$a_n - 1 = -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 1 + (-1)^n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ **例題**

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n - 8$

(2) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

(4) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$

(5) $a_1 = 5, \quad 2a_{n+1} = a_n + 3$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n + 8$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n-\alpha\}$ は，初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ 例題

$a_1=2,\quad a_{n+1}=3a_n-4$

（解）特性方程式 $\alpha=3\alpha-4$ より $\alpha=2$。

$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $2-2=0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n-2=0\cdot 3^{n-1}=0$ より $a_n=2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\quad a_{n+1}=3a_n-8$

特性方程式 $\alpha=3\alpha-8$ を解くと $\alpha=4$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-4=3(a_n-4)$$

数列 $\{a_n-4\}$ は，初項 $a_1-4=0$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n-4=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=4}$

(2) $a_1=-1,\quad a_{n+1}=2a_n+3$

特性方程式 $\alpha=2\alpha+3$ を解くと $\alpha=-3$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$$

数列 $\{a_n+3\}$ は，初項 $a_1+3=2$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n+3=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2^n-3}$

(3) $a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

特性方程式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$ を解くと $\alpha=2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 $a_1-2=-1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n-2=-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(4) $a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

特性方程式 $\alpha=\frac{1}{3}\alpha+2$ を解くと $\alpha=3$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$$

数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 $a_1-3=-1$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$a_n-3=-1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

(5) $a_1=5,\quad 2a_{n+1}=a_n+3$

式変形すると $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}$

特性方程式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}$ を解くと $\alpha=3$

$$a_{n+1}-3=\frac{1}{2}(a_n-3)$$

数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 $a_1-3=2$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n-3=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+3}$

(6) $a_1=2,\quad a_{n+1}=-3a_n+8$

特性方程式 $\alpha=-3\alpha+8$ を解くと $\alpha=2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-2=-3(a_n-2)$$

数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 $a_1-2=0$，公比 -3 の等比数列であるから

$a_n-2=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ 例題

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -a_n + 4$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

(3) $a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n + 4$

(4) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

(5) $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$

(6) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = -2a_n + 12$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

特性方程式を利用する形

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形は，特性方程式を利用して等比数列に帰着させる。

- **手順 1：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて α を求める。
- **手順 2：** 漸化式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。
- **手順 3：** 数列 $\{a_n - \alpha\}$ は，初項 $a_1 - \alpha$，公比 p の等比数列となる。

■ **例題**

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4$

（解）特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $\alpha = 2$。

$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $2 - 2 = 0$，公比 3 の等比数列。

よって $a_n - 2 = 0 \cdot 3^{n-1} = 0$ より $a_n = 2$

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -a_n + 4$

特性方程式 $\alpha = -\alpha + 4$ を解くと $\alpha = 2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 2 = -(a_n - 2)$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は，初項 $a_1 - 2 = 0$ より

$a_n - 2 = 0$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2}$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha - 5$ を解くと $\alpha = 5$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 5 = 2(a_n - 5)$$

数列 $\{a_n - 5\}$ は，初項 $a_1 - 5 = -2$，公比 2 の等比数列より

$a_n - 5 = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 5 - 2^n}$

(3) $a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n + 4$

式変形すると $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3}$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{3}$ を解くと $\alpha = 2$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(a_n - 2)$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は，初項 $a_1 - 2 = -1$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より

$a_n - 2 = -1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

(4) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 2$ を解くと $\alpha = -1$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は，初項 $a_1 + 1 = 0$ より

$a_n + 1 = 0$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -1}$

(5) $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 1$ を解くと $\alpha = -2$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2)$$

数列 $\{a_n + 2\}$ は，初項 $a_1 + 2 = 8$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より

$a_n + 2 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} - 2}$

(6) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = -2a_n + 12$

特性方程式 $\alpha = -2\alpha + 12$ を解くと $\alpha = 4$

漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 4 = -2(a_n - 4)$$

数列 $\{a_n - 4\}$ は，初項 $a_1 - 4 = 0$ より

$a_n - 4 = 0$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 4}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- ① n の 1 次式を含む型： $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- ② r^n を含む型： $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + n$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

(5) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - n + 1$

(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3^{n+1}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- **① n の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- **② r^n を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$

$a_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(a_n + n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + n + 1\}$ は初項 $1 + 1 + 1 = 3$，公比 2 の等比数列。

$a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + n$

$a_{n+1} + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4} = 3\left(a_n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\}$ は初項 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$，公比 3 の等比数列。

$a_n + \frac{2n+1}{4} = \frac{7}{4} \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{7 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1}{4}}$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$

特性方程式 $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ より $\alpha = 1$

$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$，初項 $b_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

$b_n - 1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ より $b_n = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 3^n\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = \boldsymbol{3^n - 3 \cdot 2^{n-1}}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}$

特性方程式 $\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ より $\alpha = -1$

$b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$，初項 $b_1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$b_n + 1 = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\} = \boldsymbol{3^n - 2^n}$

(5) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - n + 1$

$a_{n+1} - (n+1) = 2(a_n - n)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - n\}$ は初項 $0 - 1 = -1$，公比 2 の等比数列。

$a_n - n = -1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -2^{n-1} + n}$

(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3^{n+1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} - 1$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n - 1$

特性方程式 $\alpha = \frac{2}{3}\alpha - 1$ より $\alpha = -3$

$b_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}(b_n + 3)$，初項 $b_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

$b_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 3^n\left\{4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\right\} = \boldsymbol{4 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 3^{n+1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- **① n の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- **② r^n を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - n$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4^n$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4a_n + 2^n$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdot 3^n$

数学 B 数列「漸化式」解答　　(Day3) 応用形②

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- **① n の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- **② r^n を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n$

$a_{n+1} + 2(n+1) + 2 = 2(a_n + 2n + 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + 2n + 2\}$ は初項 $1 + 2 + 2 = 5$，公比 2 の等比数列。

$a_n + 2n + 2 = 5 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2n - 2}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - n$

$a_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{4} = 3\left(a_n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\}$ は初項 $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$，公比 3 の等比数列。

$a_n - \frac{2n+1}{4} = \frac{5}{4} \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1} + 2n + 1}{4}}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4^n$

両辺を 4^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4}$

$b_n = \frac{a_n}{4^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}$ より $\alpha = \frac{1}{2}$

$b_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(b_n - \frac{1}{2})$，初項 $b_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$b_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = -2^{2n-2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{2n-1} = \boldsymbol{2 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}}$

※別解：$a_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{2}$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha + \frac{1}{2}$ より $\alpha = -\frac{1}{2}$

$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 2(b_n + \frac{1}{2})$，初項 $b_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2} = 2^n - \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 2^n\left(2^n - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{4^n - 2^{n-1}}$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$

$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 $1 + 1 = 2$，公比 3 の等比数列。

$a_n + n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n}$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdot 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - \frac{2}{3}$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n - \frac{2}{3}$（等差数列）

$b_n = b_1 + (n-1)(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} = \frac{4-2n}{3}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 3^n \cdot \frac{4-2n}{3} = \boldsymbol{(4 - 2n)3^{n-1}}$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- ① **n の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- ② **r^n を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -a_n + n$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 2n$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4^n$

(4) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 2a_n + 5^n$

(5) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n + n - 2$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$

数学 B 数列「漸化式」解答 (Day3) 応用形③

解答時間: ______ 分 ______ 秒　得点: ________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- **① n の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- **② r^n を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -a_n + n$

$a_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4} = -(a_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4})$ と変形できる。

数列 $\{a_n - \frac{2n-1}{4}\}$ は初項 $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$，公比 -1 の等比数列。

$a_n - \frac{2n-1}{4} = \frac{7}{4}(-1)^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \frac{7(-1)^{n-1}+2n-1}{4}}$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n - 2n$

$a_{n+1} - 2(n+1) - 2 = 2(a_n - 2n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2n - 2\}$ は初項 $1 - 2 - 2 = -3$，公比 2 の等比数列。

$a_n - 2n - 2 = -3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = -3 \cdot 2^{n-1} + 2n + 2}$

(3) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 4^n$

両辺を 4^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4}$

特性方程式 $\alpha = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}$ より $\alpha = 1$

$b_n = 1 + (b_1 - 1)(\frac{3}{4})^{n-1} = 1 + (\frac{1}{4} - 1)(\frac{3}{4})^{n-1}$

$b_n = 1 - \frac{3}{4}(\frac{3}{4})^{n-1} = 1 - (\frac{3}{4})^n$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 4^n - 3^n}$

(4) $a_1 = 4,\quad a_{n+1} = 2a_n + 5^n$

両辺を 5^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a_n}{5^n} + \frac{1}{5}$

特性方程式 $\alpha = \frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{5}$ より $\alpha = \frac{1}{3}$

$b_n = \frac{1}{3} + (\frac{4}{5} - \frac{1}{3})(\frac{2}{5})^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{7}{15}(\frac{2}{5})^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n} = \frac{1}{3} \cdot 5^n + \frac{7}{15} \cdot 5^n \cdot \frac{5}{2}(\frac{2}{5})^n \times \frac{2}{5} \ldots$ 計算複雑

※ $b_n = \frac{1}{3}(1 + \frac{7}{5}(\frac{2}{5})^{n-1}) \ldots$

$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}(5^n + 7 \cdot 2^{n-1})}$

(5) $a_1 = 0,\quad a_{n+1} = 2a_n + n - 2$

$a_{n+1} + (n+1) = 2(a_n + n)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 $0 + 1 = 1$，公比 2 の等比数列。

$a_n + n = 1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(6) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2}$

$b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2}$ (等差数列)

$b_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{3}{2} = \frac{3n-2}{2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n} = 2^n \cdot \frac{3n-2}{2} = \boldsymbol{(3n-2)2^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- ① n **の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- ② r^n **を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r} b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 3n$

(2) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2n$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 4a_n + 3^n$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 5a_n + 2^n$

(5) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 2a_n - n - 1$

(6) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 5^n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

n の式や r^n を含む応用形

基本形ではない場合，以下の変形を行って既知の形に帰着させる。

- **① n の 1 次式を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + (An + B)$
  $\Rightarrow$ 階差数列を利用する。$a_{n+1} - a_n = pa_n - a_{n-1} + A$ (番号をずらして引く)
  $\Rightarrow$ または，$a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ と変形する。
- **② r^n を含む型：** $a_{n+1} = pa_n + r^n$
  $\Rightarrow$ 両辺を r^{n+1} で割る。$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{1}{r}$
  $\Rightarrow$ $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおくと，$b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{1}{r}$ の形になる。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3n$

$a_{n+1} + 3(n+1) + 3 = 2(a_n + 3n + 3)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + 3n + 3\}$ は初項 $1 + 3 + 3 = 7$，公比 2 の等比数列。

$a_n + 3n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3n - 3}$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n$

$a_{n+1} + (n+1) + \frac{1}{2} = 3(a_n + n + \frac{1}{2})$ と変形できる。

数列 $\{a_n + n + \frac{1}{2}\}$ は初項 $3 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$，公比 3 の等比数列。

$a_n + n + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^{n+1}}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 1}{2}}$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

特性方程式 $\alpha = \frac{4}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ より $\alpha = -1$

$b_n = -1 + (\frac{2}{3} + 1)(\frac{4}{3})^{n-1} = -1 + \frac{5}{3}(\frac{4}{3})^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 3^n\{\frac{5}{4}(\frac{4}{3})^n - 1\} = \boldsymbol{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

特性方程式 $\alpha = \frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ より $\alpha = -\frac{1}{3}$

$b_n = -\frac{1}{3} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})(\frac{5}{2})^{n-1} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}(\frac{5}{2})^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 2^n\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(\frac{5}{2})^n\} = \boldsymbol{\frac{5^n - 2^n}{3}}$

(5) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - n - 1$

$a_{n+1} - (n+1) - 2 = 2(a_n - n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - n - 2\}$ は初項 $2 - 1 - 2 = -1$，公比 2 の等比数列。

$a_n - n - 2 = -1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -2^{n-1} + n + 2}$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 5^n$

両辺を 5^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a_n}{5^n} + \frac{2}{5}$

特性方程式 $\alpha = \frac{3}{5}\alpha + \frac{2}{5}$ より $\alpha = 1$

$b_n = 1 + (\frac{1}{5} - 1)(\frac{3}{5})^{n-1} = 1 - \frac{4}{5}(\frac{3}{5})^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n} = 5^n - 4 \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^n \times \frac{1}{(3/5)^1} \cdots$

整理：$\boldsymbol{a_n = 5^n - 4 \cdot 3^{n-1} \cdot 5}$ ※要検算

$\rightarrow$ 正解: $b_n = 1 - \frac{4}{3}(\frac{3}{5})^n \rightarrow \boldsymbol{a_n = 5^n - 4 \cdot 3^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n = (\text{式})$ なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n - 3$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4n - 1$

(4) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2$

(5) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

数学 B 数列「漸化式」解答　　(Day4) 前半の復習①

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n = $ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n - 3$

公差 -3 の等差数列であるから

$a_n = 2 + (n-1)(-3) = -3n + 5$

$\boldsymbol{a_n = -3n + 5}$

(2) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = -2a_n$

公比 -2 の等比数列であるから

$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 4n - 1$

階差数列が $4n-1$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$

$= 1 + 2n^2 - 2n - n + 1 = 2n^2 - 3n + 2$

$n = 1$ のとき $2 - 3 + 2 = 1$ で成立。

$\boldsymbol{a_n = 2n^2 - 3n + 2}$

(4) $a_1 = 4,\quad a_{n+1} = 3a_n - 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 2 \iff \alpha = 1$

$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $4 - 1 = 3$，公比 3 の等比数列。

$a_n - 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 3^n + 1}$

(5) $a_1 = -1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha + 3 \iff \alpha = -3$

$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$

数列 $\{a_n + 3\}$ は初項 $-1 + 3 = 2$，公比 2 の等比数列。

$a_n + 3 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 2^n - 3}$

(6) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \iff \alpha = 2$

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

初項 $2 - 2 = 0$ より $a_n - 2 = 0 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = 0$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

(2) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - n$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 4^n$

(6) $a_1 = 5, \quad 2a_{n+1} = a_n + 3$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \iff \alpha = 1$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とすると $b_n - 1 = (\frac{1}{3} - 1)(\frac{2}{3})^{n-1}$

$b_n = 1 - \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = 1 - (\frac{2}{3})^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 3^n - 2^n}$

(2) $a_1 = 0,\quad a_{n+1} = 2a_n - n$

$a_{n+1} - (n+1) - 1 = 2(a_n - n - 1)$ と変形。

数列 $\{a_n - n - 1\}$ は初項 $0 - 1 - 1 = -2$，公比 2 の等比数列。

$a_n - n - 1 = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = -2^n + n + 1}$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2 + 2^n - 2 = 2^n$

$n = 1$ のときも成立。　$\boldsymbol{a_n = 2^n}$

(4) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

特性方程式 $\alpha = 4\alpha - 6 \iff \alpha = 2$

$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$

$a_n - 2 = (3 - 2) \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 4^{n-1} + 2}$

(5) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 4^n$

両辺を 4^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a_n}{4^n} + \frac{2}{4}$

$\alpha = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2} \iff \alpha = 2$

$b_n - 2 = (\frac{1}{4} - 2)(\frac{3}{4})^{n-1} = -\frac{7}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}$

$a_n = 4^n\{2 - \frac{7}{3}(\frac{3}{4})^n\} = 2 \cdot 4^n - \frac{7}{3} \cdot 3^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 4^n - 7 \cdot 3^{n-1}}$

(6) $a_1 = 5,\quad 2a_{n+1} = a_n + 3$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2} \iff \alpha = 3$

$a_n - 3 = (5 - 3)(\frac{1}{2})^{n-1} = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-2}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = (\frac{1}{2})^{n-2} + 3}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

(2) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -a_n + 6$

(3) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n - n^2$

(5) $a_1 = 1,\quad 3a_{n+1} = a_n - 6$

(6) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

数学 B 数列「漸化式」解答 (Day4) 前半の復習③

解答時間: ________ 分 ________ 秒 得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 2(a_n + 2n + 3)$ と変形。

数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ は初項 $1 + 2 + 3 = 6$，公比 2 の等比数列。

$a_n + 2n + 3 = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^n - 2n - 3}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -a_n + 6$

$\alpha = -\alpha + 6 \iff \alpha = 3$

$a_n - 3 = (2-3)(-1)^{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = (-1)^n + 3}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \iff \alpha = -1$

$b_n + 1 = (\frac{1}{2} + 1)(\frac{3}{2})^{n-1} = \frac{3}{2}(\frac{3}{2})^{n-1} = (\frac{3}{2})^n$

$a_n = 2^n\{(\frac{3}{2})^n - 1\} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 3^n - 2^n}$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - n^2$

階差数列が $-n^2$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 3 - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$= \frac{18 - (2n^3 - 3n^2 + n)}{6} = \frac{-2n^3 + 3n^2 - n + 18}{6}$

$\boldsymbol{a_n = \frac{-2n^3 + 3n^2 - n + 18}{6}}$

(5) $a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n - 6$

$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - 2$

$\alpha = \frac{1}{3}\alpha - 2 \iff \alpha = -3$

$a_n + 3 = (1+3)(\frac{1}{3})^{n-1} = 4(\frac{1}{3})^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 4(\frac{1}{3})^{n-1} - 3}$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{2}$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと，公差 $-\frac{3}{2}$ の等差数列。

$b_n = 1 + (n-1)(-\frac{3}{2}) = \frac{5-3n}{2}$

$a_n = 2^n \cdot \frac{5-3n}{2} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = (5-3n)2^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 4a_n + 3n - 2$

(2) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} = a_n + 2n + 3$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -2a_n + 3^n$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

(5) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 4^n$

(6) $a_1 = -2,\quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒 得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 4a_n + 3n - 2$

$a_{n+1} + (n+1) = 4(a_n + n)$ と変形。

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 2，公比 4 の等比数列。

$a_n + n = 2 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - n}$

(2) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} = a_n + 2n + 3$

階差数列が $2n+3$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) = 5 + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 3(n-1)$

$= 5 + n^2 - n + 3n - 3 = n^2 + 2n + 2$

$n = 1$ で $1 + 2 + 2 = 5$ 成立。 $\boldsymbol{a_n = n^2 + 2n + 2}$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -2a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$\alpha = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$b_n - \frac{1}{5} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{5})(-\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{7}{15}(-\frac{2}{3})^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = \frac{1}{5} \cdot 3^n + \frac{7}{5} \cdot 3^{n-1} \cdot (-2)^{n-1}}$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

$\alpha = 3\alpha + 2 \iff \alpha = -1$

$a_n + 1 = (1+1) \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1}$

(5) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 4^n$

階差数列が 4^n。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 3 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} = 3 + \frac{4^n - 4}{3} = \frac{4^n + 5}{3}$

$n = 1$ のとき $(4+5)/3 = 3$ 成立。 $\boldsymbol{a_n = \frac{4^n+5}{3}}$

(6) $a_1 = -2,\quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{2}$

$b_n = -1 + (n-1)(-\frac{3}{2}) = \frac{1-3n}{2}$

$a_n = 2^n \cdot \frac{1-3n}{2} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = (1-3n)2^{n-1}}$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  ⇒ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  ⇒ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**

  ⇒ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  ⇒ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{3},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 3$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 1}$

(5) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2^n$

(6) $a_1 = \dfrac{1}{2},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} - b_n = 2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$，公差 2 の等差数列。

$b_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2n-1}}$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{3},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 2$

$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 3$ より，$b_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2n+1}}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 3$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 3$

$b_1 = 4$ より，$b_n = 4 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n+1}}$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 4 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 4$

$b_1 = 1$ より，$b_n = 1 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 3$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{4n-3}}$

(5) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2^n$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} = 2^n - 1$

$n = 1$ でも成立。$b_n = 2^n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}}$

(6) $a_1 = \dfrac{1}{2},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 1$

$b_1 = 2$ より，$b_n = 2 + (n-1)\cdot 1 = n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{n+1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒 得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- **② 数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = 2a_n - 1$

(2) $S_n = 3a_n + n$

(3) $S_n = 4a_n - 3$

(4) $S_n = 2a_n - n + 1$

(5) $S_n = -2a_n + 3$

(6) $S_n = -a_n + 2$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = 2a_n - 1$

$n = 1$ とすると $S_1 = 2a_1 - 1 \implies a_1 = 2a_1 - 1 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (2a_{n+1} - 1) - (2a_n - 1)$

$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n \implies a_{n+1} = 2a_n$

初項 1，公比 2 の等比数列より

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 2^{n-1}}$

(2) $S_n = 3a_n + n$

$S_1 = 3a_1 + 1 \implies a_1 = 3a_1 + 1 \therefore a_1 = -\dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (3a_{n+1} + n + 1) - (3a_n + n)$

$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n + 1 \implies 2a_{n+1} = 3a_n - 1$

$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{1}{2} \implies a_{n+1} - 1 = \dfrac{3}{2}(a_n - 1)$

$a_n - 1 = (-\dfrac{1}{2} - 1)(\dfrac{3}{2})^{n-1}$

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 1 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(3) $S_n = 4a_n - 3$

$S_1 = 4a_1 - 3 \implies a_1 = 4a_1 - 3 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = (4a_{n+1} - 3) - (4a_n - 3) = 4a_{n+1} - 4a_n$

$3a_{n+1} = 4a_n \implies a_{n+1} = \dfrac{4}{3}a_n$

初項 1，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列より

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}}$

(4) $S_n = 2a_n - n + 1$

$S_1 = 2a_1 \implies a_1 = 2a_1 \therefore a_1 = 0$

$a_{n+1} = \{2a_{n+1} - (n+1) + 1\} - \{2a_n - n + 1\}$

$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 1 \implies a_{n+1} = 2a_n + 1$

$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ より $a_n + 1 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - 1}$

(5) $S_n = -2a_n + 3$

$S_1 = -2a_1 + 3 \implies a_1 = -2a_1 + 3 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = (-2a_{n+1} + 3) - (-2a_n + 3) = -2a_{n+1} + 2a_n$

$3a_{n+1} = 2a_n \implies a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n$

初項 1，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$

(6) $S_n = -a_n + 2$

$S_1 = -a_1 + 2 \implies a_1 = -a_1 + 2 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n \implies 2a_{n+1} = a_n$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$

初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- **② 数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n + 2}$

(2)　$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$

(3)　$a_1 = \dfrac{1}{3},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 - 2a_n}$

(4)　$S_n = 2a_n - 2n$

(5)　$S_n = 3a_n - 2^n$

(6)　$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- **② 数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n + 2}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{3a_n + 2}{2a_n} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + \dfrac{3}{2}$

$b_1 = 1$ より $b_n = 1 + (n-1)\dfrac{3}{2} = \dfrac{3n-1}{2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{3n-1}}$

(2) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2a_n + 3}{a_n} = 2 + \dfrac{3}{a_n}$

$b_{n+1} = 3b_n + 2 \implies b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

$b_1 = \dfrac{1}{2}$ より $b_n + 1 = (\dfrac{1}{2} + 1) \cdot 3^{n-1} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^n$

$b_n = \dfrac{3^n - 2}{2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{3^n - 2}}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{3},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 - 2a_n}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1 - 2a_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_n} - 2$

$b_{n+1} = b_n - 2$

$b_1 = 3$ より $b_n = 3 + (n-1)(-2) = -2n + 5$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{5 - 2n}}$

(4) $S_n = 2a_n - 2n$

$S_1 = 2a_1 - 2 \implies a_1 = 2$

$a_{n+1} = \{2a_{n+1} - 2(n+1)\} - \{2a_n - 2n\}$

$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 2 \implies a_{n+1} = 2a_n + 2$

$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$ より $a_n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 2}$

(5) $S_n = 3a_n - 2^n$

$S_1 = 3a_1 - 2 \implies a_1 = 1$

$a_{n+1} = (3a_{n+1} - 2^{n+1}) - (3a_n - 2^n)$

$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n - 2^n \implies 2a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{3}{4}\alpha + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2$

$b_n = 2 + (\dfrac{1}{2} - 2)(\dfrac{3}{4})^{n-1} = 2 - \dfrac{3}{2}(\dfrac{3}{4})^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 3^n}$

(6) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{2}{a_n}$

$b_{n+1} = 2b_n + 1 \implies b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

$b_1 = 1$ より $b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$b_n = 2^n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$,　$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

(2) $S_n = 3a_n - 2$

(3) $a_1 = 1$,　$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

(4) $S_n = 4a_n + n$

(5) $a_1 = \dfrac{1}{5}$,　$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2n$

(6) $S_n = -2a_n + 4n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）**： $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- **② 数列の和 S_n を含む型**：
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = 3 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_{n+1} = b_n + 3$

$b_n = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n-1}}$

(2) $S_n = 3a_n - 2$

$a_1 = 3a_1 - 2 \implies a_1 = 1$

$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n \implies 2a_{n+1} = 3a_n$

$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n + 2}{2a_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

$b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2}$

$b_n = 1 + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{n+1}}$

(4) $S_n = 4a_n + n$

$a_1 = 4a_1 + 1 \implies a_1 = -\dfrac{1}{3}$

$a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n + 1 \implies 3a_{n+1} = 4a_n - 1$

$a_{n+1} = \dfrac{4}{3}a_n - \dfrac{1}{3} \implies a_{n+1} - 1 = \dfrac{4}{3}(a_n - 1)$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 1 - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}}$

(5) $a_1 = \dfrac{1}{5}, \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2n$

$b_{n+1} - b_n = 2n$

$b_n = 5 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 5 + n(n-1) = n^2 - n + 5$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{n^2 - n + 5}}$

(6) $S_n = -2a_n + 4n$

$a_1 = -2a_1 + 4 \implies a_1 = \dfrac{4}{3}$

$a_{n+1} = -2a_{n+1} + 2a_n + 4 \implies 3a_{n+1} = 2a_n + 4$

$a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{4}{3} \implies a_{n+1} - 4 = \dfrac{2}{3}(a_n - 4)$

$a_n - 4 = (\dfrac{4}{3} - 4)(\dfrac{2}{3})^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 4 - \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha$の式$)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_2=2,\quad a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

(2)　$a_1=1,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(3)　$a_1=2,\ a_2=5,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

(4)　$a_1=0,\ a_2=2,\quad a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 4

隣接3項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる2つの解 α,β をもつとき：**
  以下の2通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=2,\quad a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

$x^2-3x+2=0$ を解くと $x=1,2$

$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)\ldots① \\ a_{n+2}-2a_{n+1}=1(a_{n+1}-2a_n)\ldots② \end{cases}$

①より $a_{n+1}-a_n=(2-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

②より $a_{n+1}-2a_n=(2-2)\cdot 1^{n-1}=0$

辺々引いて $(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+1}-2a_n)=2^{n-1}-0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$

(2) $a_1=1,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

$x^2-5x+6=0$ を解くと $x=2,3$

$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)\ldots① \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)\ldots② \end{cases}$

①より $a_{n+1}-2a_n=(4-2)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$

②より $a_{n+1}-3a_n=(4-3)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

辺々引いて $a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}}$

(3) $a_1=2,\ a_2=5,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

$x^2-4x+3=0$ を解くと $x=1,3$

$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)\ldots① \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=1(a_{n+1}-3a_n)\ldots② \end{cases}$

①より $a_{n+1}-a_n=(5-2)\cdot 3^{n-1}=3^n$

②より $a_{n+1}-3a_n=(5-6)\cdot 1^{n-1}=-1$

辺々引いて $2a_n=3^n-(-1)=3^n+1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n+1}{2}}$

(4) $a_1=0,\ a_2=2,\quad a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$

$x^2-x-6=0$ を解くと $x=3,-2$

$\begin{cases} a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)\ldots① \\ a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)\ldots② \end{cases}$

①より $a_{n+1}-3a_n=(2-0)(-2)^{n-1}=2(-2)^{n-1}$

②より $a_{n+1}+2a_n=(2-0)3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$

辺々引いて $-5a_n=2(-2)^{n-1}-2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{5}\{3^{n-1}-(-2)^{n-1}\}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ 型は，特性方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1} = \alpha a_n + (\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$

(2)　$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 0$

(3)　$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$

(4)　$a_1 = 3,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=1,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$

$x^2-2x-3=0 \iff (x-3)(x+1)=0 \iff$

$x=3,-1$

$$\begin{cases} a_{n+1}-3a_n=(1-3)(-1)^{n-1}=-2(-1)^{n-1} \\ a_{n+1}+a_n=(1+1)3^{n-1}=2\cdot3^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-4a_n=-2(-1)^{n-1}-2\cdot3^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}}$

(2) $a_1=2,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0$

$x^2-6x+5=0 \iff x=1,5$

$$\begin{cases} a_{n+1}-5a_n=(3-10)1^{n-1}=-7 \\ a_{n+1}-a_n=(3-2)5^{n-1}=5^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-4a_n=-7-5^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{5^{n-1}+7}{4}}$

(3) $a_1=1,\ a_2=-1,\quad a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$

$x^2+x-2=0 \iff x=1,-2$

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=(-1-1)(-2)^{n-1}=-2(-2)^{n-1}=(-2)^n \\ a_{n+1}+2a_n=(-1+2)1^{n-1}=1 \end{cases}$$

辺々引いて $-3a_n=(-2)^n-1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}}$

(4) $a_1=3,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}-5a_n=0$

$x^2-4x-5=0 \iff x=5,-1$

$$\begin{cases} a_{n+1}-5a_n=(3-15)(-1)^{n-1}=-12(-1)^{n-1} \\ a_{n+1}+a_n=(3+3)5^{n-1}=6\cdot5^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-6a_n=-12(-1)^{n-1}-6\cdot5^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=5^{n-1}+2(-1)^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

(2) $a_1=2,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_2=0,\quad a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0$

(4) $a_1=4,\ a_2=8,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$

数学 B 数列「漸化式」解答　　(Day6) 隣接 3 項間の漸化式③

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α,β をもつとき：**

  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。

  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

- **重解 α をもつとき：**

  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。

  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

$x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0$ より $x=2$ (重解)

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $3-2=1$，公比 2 の等比数列。

$a_{n+1}-2a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{4}$

数列 $\{\dfrac{a_n}{2^n}\}$ は等差数列。$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\dfrac{1}{4}=\dfrac{n+1}{4}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-2}}$

(2) $a_1=2,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

$x^2-6x+9=0 \iff x=3$ (重解)

$a_{n+1}-3a_n=(4-6)\cdot 3^{n-1}=-2\cdot 3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=-\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{2}{3}+(n-1)(-\dfrac{2}{9})=\dfrac{8-2n}{9}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(4-n)\cdot 2\cdot 3^{n-2}}$

(3) $a_1=1,\ a_2=0,\quad a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0$

$x^2+2x+1=0 \iff x=-1$ (重解)

$a_{n+1}-(-1)a_n=(0-(-1))(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$

両辺を $(-1)^{n+1}$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}-\dfrac{a_n}{(-1)^n}=1$

$\dfrac{a_n}{(-1)^n}=-1+(n-1)\cdot 1=n-2$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n-2)(-1)^n}$

(4) $a_1=4,\ a_2=8,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$

$x^2-2x+1=0 \iff x=1$ (重解)

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ より，階差数列が定数。

つまり $\{a_n\}$ は等差数列となる。

初項 4，公差 $8-4=4$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=4+(n-1)4=4n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=5,\quad a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

(2) $a_1=0,\ a_2=1,\quad a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_2=-2,\quad a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=0$

(4) $a_1=2,\ a_2=6,\quad a_{n+2}-16a_n=0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ 型は，特性方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1} = \alpha a_n + (\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\quad a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \iff x = 3, 4$

$$\begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (5-3)4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} \\ a_{n+1} - 4a_n = (5-4)3^{n-1} = 3^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-1}}$

(2) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} - 8a_{n+1} + 16a_n = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0 \iff x = 4$ (重解)

$a_{n+1} - 4a_n = (1-0)4^{n-1} = 4^{n-1}$

両辺を 4^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}} - \dfrac{a_n}{4^n} = \dfrac{1}{16}$

$\dfrac{a_n}{4^n} = 0 + (n-1)\dfrac{1}{16} = \dfrac{n-1}{16}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = (n-1)4^{n-2}}$

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\quad a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \iff x = -1, -2$

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_n = (-2+1)(-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} \\ a_{n+1} + 2a_n = (-2+2)(-1)^{n-1} = 0 \end{cases}$$

辺々引いて $-a_n = -(-2)^{n-1} - 0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = (-2)^{n-1}}$

(4) $a_1 = 2,\ a_2 = 6,\quad a_{n+2} - 16a_n = 0$

$x^2 - 16 = 0 \iff x = 4, -4$

$$\begin{cases} a_{n+1} - 4a_n = (6-8)(-4)^{n-1} = -2(-4)^{n-1} \\ a_{n+1} + 4a_n = (6+8)4^{n-1} = 14 \cdot 4^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-8a_n = -2(-4)^{n-1} - 14 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{(-4)^{n-1} + 7 \cdot 4^{n-1}}{4}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} = a_n - 2$

(2) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -3a_n$

(3) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = -2a_n + 6$

(5) $a_1 = 4,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

(6) $a_1 = -2,\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - 3$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n - 2$

公差 -2 の等差数列であるから

$a_n = 5 + (n-1)(-2) = -2n + 7$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -2n + 7}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n$

公比 -3 の等比数列であるから

$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha - 5 \iff \alpha = 5$

$a_{n+1} - 5 = 2(a_n - 5)$

数列 $\{a_n - 5\}$ は初項 $3 - 5 = -2$，公比 2 の等比数列。

$a_n - 5 = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 5 - 2^n}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -2a_n + 6$

特性方程式 $\alpha = -2\alpha + 6 \iff 3\alpha = 6 \iff \alpha = 2$

$a_{n+1} - 2 = -2(a_n - 2)$

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $1 - 2 = -1$，公比 -2 の等比数列。

$a_n - 2 = -1 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 - (-2)^{n-1}}$

(5) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 2 \iff \alpha = -1$

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $4 + 1 = 5$，公比 3 の等比数列。

$a_n + 1 = 5 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 1}$

(6) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - 3$

特性方程式 $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha - 3 \iff \dfrac{1}{2}\alpha = -3 \iff \alpha = -6$

$a_{n+1} + 6 = \dfrac{1}{2}(a_n + 6)$

数列 $\{a_n + 6\}$ は初項 $-2 + 6 = 4$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列。

$a_n + 6 = 4 \cdot (\dfrac{1}{2})^{n-1} = (\dfrac{1}{2})^{n-3}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = (\dfrac{1}{2})^{n-3} - 6}$

数学 B 数列「漸化式」　(Day7) 総復習②

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3^{n+1}$

(5) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - 2n$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3^n$

解答時間: ＿＿＿ 分 ＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$

$a_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(a_n + n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + n + 1\}$ は初項 $1 + 1 + 1 = 3$，公比 2 の等比数列。

$a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1}$

$n = 1$ のとき $2^2 = 4$。元の式 $a_2 = 2 + 2 = 4$ なので成立。

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1}}$ （または $2 \cdot 2^n$）

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{3}{2}\alpha + \dfrac{1}{2} \iff \alpha = -1$

$b_n + 1 = (\dfrac{1}{2} + 1)(\dfrac{3}{2})^{n-1} = (\dfrac{3}{2})^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^n\{(\frac{3}{2})^n - 1\} = 3^n - 2^n}$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3^{n+1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a_n}{3^n} - 1$

$\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha - 1 \iff \alpha = -3$

$b_n + 3 = (1 + 3)(\dfrac{2}{3})^{n-1} = 4(\dfrac{2}{3})^{n-1}$

$a_n = 3^n\{4(\dfrac{2}{3})^{n-1} - 3\} = 4 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 3^{n+1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3^{n+1}}$

(5) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - 2n$

$a_{n+1} - 2(n+1) - 2 = 2(a_n - 2n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2n - 2\}$ は初項 $0 - 2 - 2 = -4$，公比 2 の等比数列。

$a_n - 2n - 2 = -4 \cdot 2^{n-1} = -2^{n+1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -2^{n+1} + 2n + 2}$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{3}$

$\alpha = \dfrac{4}{3}\alpha + \dfrac{1}{3} \iff \alpha = -1$

$b_n + 1 = (\dfrac{1}{3} + 1)(\dfrac{4}{3})^{n-1} = \dfrac{4}{3}(\dfrac{4}{3})^{n-1} = (\dfrac{4}{3})^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 3^n\{(\frac{4}{3})^n - 1\} = 4^n - 3^n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{4},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

(3) $S_n = 3a_n - n$

(4) $S_n = 2a_n - 2^n$

(5) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 3$

(6) $S_n = -2a_n + 3n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{4}$，　$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 3 + \dfrac{1}{a_n}$

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は初項 4，公差 3 の等差数列。

$\dfrac{1}{a_n} = 4 + (n-1)3 = 3n+1$　$\therefore \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n+1}}$

(2) $a_1 = 1$，　$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列。

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$　$\therefore \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{n+1}}$

(3) $S_n = 3a_n - n$

$S_1 = 3a_1 - 1 \implies a_1 = 3a_1 - 1 \therefore a_1 = \dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (3a_{n+1} - n - 1) - (3a_n - n)$

$2a_{n+1} = 3a_n + 1 \implies a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + \dfrac{1}{2}$

$a_n + 1 = (\dfrac{1}{2} + 1)(\dfrac{3}{2})^{n-1}$　$\therefore \boldsymbol{a_n = (\dfrac{3}{2})^n - 1}$

(4) $S_n = 2a_n - 2^n$

$S_1 = 2a_1 - 2 \implies a_1 = 2$

$a_{n+1} = (2a_{n+1} - 2^{n+1}) - (2a_n - 2^n) = 2a_{n+1} - 2a_n - 2^n$

$a_{n+1} = 2a_n + 2^n$　($\div 2^{n+1} \to$ 階差型)

$\dfrac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$　$\therefore \boldsymbol{a_n = (n+1)2^{n-1}}$

(5) $a_1 = 1$，　$\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 3$

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列。

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n-2}}$

(6) $S_n = -2a_n + 3n$

$S_1 = -2a_1 + 3 \implies a_1 = 1$

$a_{n+1} = (-2a_{n+1} + 3n + 3) - (-2a_n + 3n)$

$3a_{n+1} = 2a_n + 3 \implies a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1$

$a_n - 3 = (1-3)(\dfrac{2}{3})^{n-1}$　$\therefore \boldsymbol{a_n = 3 - 2(\dfrac{2}{3})^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

(2) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

(4) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

(5) $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$

(6) $a_1 = 2,\ a_2 = 6,\quad a_{n+2} - 16a_n = 0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2, 3$

$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1},\quad a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}$

辺々引いて $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}}$

(2) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1, 3$

$a_{n+1} - a_n = 3^n,\quad a_{n+1} - 3a_n = -1$

辺々引いて $2a_n = 3^n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n + 1}{2}}$

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff x = 2$ (重解)

$a_{n+1} - 2a_n = 2^{n-1}$

両辺 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n-1}{4} = \dfrac{n+1}{4}\quad \therefore \boldsymbol{a_n = (n+1)2^{n-2}}$

(4) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \iff x = 3$ (重解)

$a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}$

両辺 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{1}{9}$

$\dfrac{a_n}{3^n} = 0 + \dfrac{n-1}{9}\quad \therefore \boldsymbol{a_n = (n-1)3^{n-2}}$

(5) $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1, -2$

$a_{n+1} - a_n = (-2)^n,\quad a_{n+1} + 2a_n = 1$

辺々引いて $-3a_n = (-2)^n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1 - (-2)^n}{3}}$

(6) $a_1 = 2,\ a_2 = 6,\quad a_{n+2} - 16a_n = 0$

$x^2 - 16 = 0 \iff x = 4, -4$

$a_{n+1} - 4a_n = -2(-4)^{n-1},\quad a_{n+1} + 4a_n = 14 \cdot 4^{n-1}$

辺々引いて $-8a_n = -2(-4)^{n-1} - 14 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{(-4)^{n-1} + 7 \cdot 4^{n-1}}{4}}$