数学 B 数列「漸化式」　　(Day7) 総復習①

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n - 2$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n$

(3) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -2a_n + 6$

(5) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

(6) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - 3$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n - 2$

公差 -2 の等差数列であるから

$a_n = 5 + (n-1)(-2) = -2n + 7$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = -2n + 7}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n$

公比 -3 の等比数列であるから

$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha - 5 \iff \alpha = 5$

$a_{n+1} - 5 = 2(a_n - 5)$

数列 $\{a_n - 5\}$ は初項 $3 - 5 = -2$，公比 2 の等比数列。

$a_n - 5 = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 5 - 2^n}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -2a_n + 6$

特性方程式 $\alpha = -2\alpha + 6 \iff 3\alpha = 6 \iff \alpha = 2$

$a_{n+1} - 2 = -2(a_n - 2)$

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $1 - 2 = -1$，公比 -2 の等比数列。

$a_n - 2 = -1 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 - (-2)^{n-1}}$

(5) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 2 \iff \alpha = -1$

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $4 + 1 = 5$，公比 3 の等比数列。

$a_n + 1 = 5 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 1}$

(6) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 3$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 3 \iff \frac{1}{2}\alpha = -3 \iff \alpha = -6$

$a_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}(a_n + 6)$

数列 $\{a_n + 6\}$ は初項 $-2 + 6 = 4$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列。

$a_n + 6 = 4 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-3}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = (\frac{1}{2})^{n-3} - 6}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3^{n+1}$

(5) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - 2n$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3^n$

数学 B 数列「漸化式」解答 (Day7) 総復習②

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + n$

$a_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(a_n + n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + n + 1\}$ は初項 $1 + 1 + 1 = 3$，公比 2 の等比数列。

$a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}$

(2) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1}$$

$n = 1$ のとき $2^2 = 4$。元の式 $a_2 = 2 + 2 = 4$ なので成立。

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1}}$ (または $2 \cdot 2^n$)

(3) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{3}{2}\alpha + \dfrac{1}{2} \iff \alpha = -1$

$b_n + 1 = (\dfrac{1}{2} + 1)(\dfrac{3}{2})^{n-1} = (\dfrac{3}{2})^n$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2^n\{(\dfrac{3}{2})^n - 1\} = 3^n - 2^n}$

(4) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 2a_n - 3^{n+1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a_n}{3^n} - 1$

$\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha - 1 \iff \alpha = -3$

$b_n + 3 = (1 + 3)(\dfrac{2}{3})^{n-1} = 4(\dfrac{2}{3})^{n-1}$

$a_n = 3^n\{4(\dfrac{2}{3})^{n-1} - 3\} = 4 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 3^{n+1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3^{n+1}}$

(5) $a_1 = 0,\quad a_{n+1} = 2a_n - 2n$

$a_{n+1} - 2(n+1) - 2 = 2(a_n - 2n - 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 2n - 2\}$ は初項 $0 - 2 - 2 = -4$，公比 2 の等比数列。

$a_n - 2n - 2 = -4 \cdot 2^{n-1} = -2^{n+1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = -2^{n+1} + 2n + 2}$

(6) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 4a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{3}$

$\alpha = \dfrac{4}{3}\alpha + \dfrac{1}{3} \iff \alpha = -1$

$b_n + 1 = (\dfrac{1}{3} + 1)(\dfrac{4}{3})^{n-1} = \dfrac{4}{3}(\dfrac{4}{3})^{n-1} = (\dfrac{4}{3})^n$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 3^n\{(\dfrac{4}{3})^n - 1\} = 4^n - 3^n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ 最終チェック

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{4},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

(3) $S_n = 3a_n - n$

(4) $S_n = 2a_n - 2^n$

(5) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 3$

(6) $S_n = -2a_n + 3n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{4},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 3 + \dfrac{1}{a_n}$

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は初項 4，公差 3 の等差数列。

$\dfrac{1}{a_n} = 4 + (n-1)3 = 3n+1 \quad \therefore \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n+1}}$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列。

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{n+1}{2} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{n+1}}$

(3) $S_n = 3a_n - n$

$S_1 = 3a_1 - 1 \implies a_1 = 3a_1 - 1 \therefore a_1 = \dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (3a_{n+1} - n - 1) - (3a_n - n)$

$2a_{n+1} = 3a_n + 1 \implies a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + \dfrac{1}{2}$

$a_n + 1 = (\dfrac{1}{2} + 1)(\dfrac{3}{2})^{n-1} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = (\dfrac{3}{2})^n - 1}$

(4) $S_n = 2a_n - 2^n$

$S_1 = 2a_1 - 2 \implies a_1 = 2$

$a_{n+1} = (2a_{n+1} - 2^{n+1}) - (2a_n - 2^n) = 2a_{n+1} - 2a_n - 2^n$

$a_{n+1} = 2a_n + 2^n \quad (\div 2^{n+1} \to$ 階差型)

$\dfrac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{n+1}{2} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = (n+1)2^{n-1}}$

(5) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 3$

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列。

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n-2}}$

(6) $S_n = -2a_n + 3n$

$S_1 = -2a_1 + 3 \implies a_1 = 1$

$a_{n+1} = (-2a_{n+1} + 3n + 3) - (-2a_n + 3n)$

$3a_{n+1} = 2a_n + 3 \implies a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1$

$a_n - 3 = (1-3)(\dfrac{2}{3})^{n-1} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 3 - 2(\dfrac{2}{3})^{n-1}}$

数学 B 数列「漸化式」　　(Day7) 総復習④

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

(2)　$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

(3)　$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

(4)　$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

(5)　$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$

(6)　$a_1 = 2,\ a_2 = 6,\quad a_{n+2} - 16a_n = 0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ________ / 6

1 週間の総復習

全パターンの解法を整理し，最適なアプローチを選択しよう。

- **基本形：** $a_{n+1} = pa_n + q$ (特性方程式)
- **応用形：** n の式 (階差・変形)，r^n (割り算)
- **分数・和：** 逆数をとる，$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
- **隣接 3 項間：** $x^2 + px + q = 0$ の解を利用

■ **最終チェック**

1. まず漸化式の形を見極める。
2. 計算後は $n = 1, 2$ を代入して検算する。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2, 3$

$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1},\quad a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}$

辺々引いて $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}}$

(2) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1, 3$

$a_{n+1} - a_n = 3^n,\quad a_{n+1} - 3a_n = -1$

辺々引いて $2a_n = 3^n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n + 1}{2}}$

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff x = 2$ (重解)

$a_{n+1} - 2a_n = 2^{n-1}$

両辺 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n-1}{4} = \dfrac{n+1}{4}\qquad \therefore \boldsymbol{a_n = (n+1)2^{n-2}}$

(4) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \iff x = 3$ (重解)

$a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}$

両辺 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{1}{9}$

$\dfrac{a_n}{3^n} = 0 + \dfrac{n-1}{9}\qquad \therefore \boldsymbol{a_n = (n-1)3^{n-2}}$

(5) $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1, -2$

$a_{n+1} - a_n = (-2)^n,\quad a_{n+1} + 2a_n = 1$

辺々引いて $-3a_n = (-2)^n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1 - (-2)^n}{3}}$

(6) $a_1 = 2,\ a_2 = 6,\quad a_{n+2} - 16a_n = 0$

$x^2 - 16 = 0 \iff x = 4, -4$

$a_{n+1} - 4a_n = -2(-4)^{n-1},\quad a_{n+1} + 4a_n = 14 \cdot 4^{n-1}$

辺々引いて $-8a_n = -2(-4)^{n-1} - 14 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{(-4)^{n-1} + 7 \cdot 4^{n-1}}{4}}$