解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=2,\quad a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

(2) $a_1=1,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(3) $a_1=2,\ a_2=5,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

(4) $a_1=0,\ a_2=2,\quad a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒 得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ 型は，特性方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1} = \alpha a_n + (\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\quad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ を解くと $x = 1, 2$

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \dots ① \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = 1(a_{n+1} - 2a_n) \dots ② \end{cases}$$

①より $a_{n+1} - a_n = (2-1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

②より $a_{n+1} - 2a_n = (2-2) \cdot 1^{n-1} = 0$

辺々引いて $(a_{n+1} - a_n) - (a_{n+1} - 2a_n) = 2^{n-1} - 0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2^{n-1}}$

(2) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ を解くと $x = 2, 3$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \dots ① \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \dots ② \end{cases}$$

①より $a_{n+1} - 2a_n = (4-2) \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

②より $a_{n+1} - 3a_n = (4-3) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

辺々引いて $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}}$

(3) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ を解くと $x = 1, 3$

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) \dots ① \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 1(a_{n+1} - 3a_n) \dots ② \end{cases}$$

①より $a_{n+1} - a_n = (5-2) \cdot 3^{n-1} = 3^n$

②より $a_{n+1} - 3a_n = (5-6) \cdot 1^{n-1} = -1$

辺々引いて $2a_n = 3^n - (-1) = 3^n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n + 1}{2}}$

(4) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\quad a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$ を解くと $x = 3, -2$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \dots ① \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \dots ② \end{cases}$$

①より $a_{n+1} - 3a_n = (2-0)(-2)^{n-1} = 2(-2)^{n-1}$

②より $a_{n+1} + 2a_n = (2-0)3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

辺々引いて $-5a_n = 2(-2)^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{5}\{3^{n-1} - (-2)^{n-1}\}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=1,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$

(2) $a_1=2,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_2=-1,\quad a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$

(4) $a_1=3,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}-5a_n=0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=1,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$

$x^2-2x-3=0 \iff (x-3)(x+1)=0 \iff$

$x=3,-1$

$$\begin{cases} a_{n+1}-3a_n=(1-3)(-1)^{n-1}=-2(-1)^{n-1} \\ a_{n+1}+a_n=(1+1)3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-4a_n=-2(-1)^{n-1}-2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}}$

(2) $a_1=2,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0$

$x^2-6x+5=0 \iff x=1,5$

$$\begin{cases} a_{n+1}-5a_n=(3-10)1^{n-1}=-7 \\ a_{n+1}-a_n=(3-2)5^{n-1}=5^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-4a_n=-7-5^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{5^{n-1}+7}{4}}$

(3) $a_1=1,\ a_2=-1,\quad a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$

$x^2+x-2=0 \iff x=1,-2$

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=(-1-1)(-2)^{n-1}=-2(-2)^{n-1}=(-2)^n \\ a_{n+1}+2a_n=(-1+2)1^{n-1}=1 \end{cases}$$

辺々引いて $-3a_n=(-2)^n-1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}}$

(4) $a_1=3,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}-5a_n=0$

$x^2-4x-5=0 \iff x=5,-1$

$$\begin{cases} a_{n+1}-5a_n=(3-15)(-1)^{n-1}=-12(-1)^{n-1} \\ a_{n+1}+a_n=(3+3)5^{n-1}=6\cdot 5^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-6a_n=-12(-1)^{n-1}-6\cdot 5^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=5^{n-1}+2(-1)^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha\text{の式})$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

(2) $a_1=2,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_2=0,\quad a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0$

(4) $a_1=4,\ a_2=8,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

$x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0$ より $x=2$ (重解)

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $3-2=1$，公比 2 の等比数列。

$a_{n+1}-2a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{4}$

数列 $\{\dfrac{a_n}{2^n}\}$ は等差数列。$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\dfrac{1}{4}=\dfrac{n+1}{4}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-2}}$

(2) $a_1=2,\ a_2=4,\quad a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

$x^2-6x+9=0 \iff x=3$ (重解)

$a_{n+1}-3a_n=(4-6)\cdot 3^{n-1}=-2\cdot 3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=-\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{2}{3}+(n-1)(-\dfrac{2}{9})=\dfrac{8-2n}{9}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(4-n)\cdot 2\cdot 3^{n-2}}$

(3) $a_1=1,\ a_2=0,\quad a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0$

$x^2+2x+1=0 \iff x=-1$ (重解)

$a_{n+1}-(-1)a_n=(0-(-1))(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$

両辺を $(-1)^{n+1}$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}-\dfrac{a_n}{(-1)^n}=1$

$\dfrac{a_n}{(-1)^n}=-1+(n-1)\cdot 1=n-2$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n-2)(-1)^n}$

(4) $a_1=4,\ a_2=8,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$

$x^2-2x+1=0 \iff x=1$ (重解)

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ より，階差数列が定数。

つまり $\{a_n\}$ は等差数列となる。

初項 4，公差 $8-4=4$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=4+(n-1)4=4n}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha の式)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=5,\quad a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

(2) $a_1=0,\ a_2=1,\quad a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_2=-2,\quad a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=0$

(4) $a_1=2,\ a_2=6,\quad a_{n+2}-16a_n=0$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 4

隣接 3 項間の漸化式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型は，特性方程式 $x^2+px+q=0$ の解を利用する。

- **異なる 2 つの解 α, β をもつとき：**
  以下の 2 通りの等比数列に変形し，連立させて a_{n+1} を消去する。
  $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$
- **重解 α をもつとき：**
  $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。
  数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の一般項を求め，その後 $a_{n+1}=\alpha a_n+(\alpha$の式$)$ を解く。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=5,\quad a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

$x^2-7x+12=0 \iff x=3,4$

$$\begin{cases} a_{n+1}-3a_n=(5-3)4^{n-1}=2\cdot 4^{n-1} \\ a_{n+1}-4a_n=(5-4)3^{n-1}=3^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $a_n=2\cdot 4^{n-1}-3^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2\cdot 4^{n-1}-3^{n-1}}$

(2) $a_1=0,\ a_2=1,\quad a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

$x^2-8x+16=0 \iff x=4$ (重解)

$a_{n+1}-4a_n=(1-0)4^{n-1}=4^{n-1}$

両辺を 4^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}-\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{a_n}{4^n}=0+(n-1)\dfrac{1}{16}=\dfrac{n-1}{16}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(n-1)4^{n-2}}$

(3) $a_1=1,\ a_2=-2,\quad a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=0$

$x^2+3x+2=0 \iff x=-1,-2$

$$\begin{cases} a_{n+1}+a_n=(-2+1)(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1} \\ a_{n+1}+2a_n=(-2+2)(-1)^{n-1}=0 \end{cases}$$

辺々引いて $-a_n=-(-2)^{n-1}-0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=(-2)^{n-1}}$

(4) $a_1=2,\ a_2=6,\quad a_{n+2}-16a_n=0$

$x^2-16=0 \iff x=4,-4$

$$\begin{cases} a_{n+1}-4a_n=(6-8)(-4)^{n-1}=-2(-4)^{n-1} \\ a_{n+1}+4a_n=(6+8)4^{n-1}=14\cdot 4^{n-1} \end{cases}$$

辺々引いて $-8a_n=-2(-4)^{n-1}-14\cdot 4^{n-1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{(-4)^{n-1}+7\cdot 4^{n-1}}{4}}$