解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- **② 数列の和 S_n を含む型：**
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 3$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 1}$

(5) $a_1 = 1, \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2^n$

(6) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} - b_n = 2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$，公差 2 の等差数列。

$b_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2n-1}}$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{3},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 2$

$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 3$ より，$b_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2n+1}}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 3$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 3$

$b_1 = 4$ より，$b_n = 4 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n+1}}$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 4 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 4$

$b_1 = 1$ より，$b_n = 1 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 3$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{4n-3}}$

(5) $a_1 = 1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2^n$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} = 2^n - 1$

$n = 1$ でも成立。$b_n = 2^n - 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}}$

(6) $a_1 = \dfrac{1}{2},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 1$

$b_1 = 2$ より，$b_n = 2 + (n-1)\cdot 1 = n + 1$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{n+1}}$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- **② 数列の和 S_n を含む型：**
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = 2a_n - 1$

(2) $S_n = 3a_n + n$

(3) $S_n = 4a_n - 3$

(4) $S_n = 2a_n - n + 1$

(5) $S_n = -2a_n + 3$

(6) $S_n = -a_n + 2$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = 2a_n - 1$

$n = 1$ とすると $S_1 = 2a_1 - 1 \implies a_1 = 2a_1 - 1 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (2a_{n+1} - 1) - (2a_n - 1)$

$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n \implies a_{n+1} = 2a_n$

初項 1，公比 2 の等比数列より

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = 2^{n-1}}$

(2) $S_n = 3a_n + n$

$S_1 = 3a_1 + 1 \implies a_1 = 3a_1 + 1 \therefore a_1 = -\dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (3a_{n+1} + n + 1) - (3a_n + n)$

$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n + 1 \implies 2a_{n+1} = 3a_n - 1$

$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{1}{2} \implies a_{n+1} - 1 = \dfrac{3}{2}(a_n - 1)$

$a_n - 1 = (-\dfrac{1}{2} - 1)(\dfrac{3}{2})^{n-1}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = 1 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(3) $S_n = 4a_n - 3$

$S_1 = 4a_1 - 3 \implies a_1 = 4a_1 - 3 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = (4a_{n+1} - 3) - (4a_n - 3) = 4a_{n+1} - 4a_n$

$3a_{n+1} = 4a_n \implies a_{n+1} = \dfrac{4}{3}a_n$

初項 1，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列より

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}}$

(4) $S_n = 2a_n - n + 1$

$S_1 = 2a_1 \implies a_1 = 2a_1 \therefore a_1 = 0$

$a_{n+1} = \{2a_{n+1} - (n+1) + 1\} - \{2a_n - n + 1\}$

$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 1 \implies a_{n+1} = 2a_n + 1$

$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ より $a_n + 1 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - 1}$

(5) $S_n = -2a_n + 3$

$S_1 = -2a_1 + 3 \implies a_1 = -2a_1 + 3 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = (-2a_{n+1} + 3) - (-2a_n + 3) = -2a_{n+1} + 2a_n$

$3a_{n+1} = 2a_n \implies a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n$

初項 1，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$

(6) $S_n = -a_n + 2$

$S_1 = -a_1 + 2 \implies a_1 = -a_1 + 2 \therefore a_1 = 1$

$a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n \implies 2a_{n+1} = a_n$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$

初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n + 2}$

(2) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{3},\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 - 2a_n}$

(4) $S_n = 2a_n - 2n$

(5) $S_n = 3a_n - 2^n$

(6) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒 得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow \dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。

- ② **数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n + 2}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{3a_n + 2}{2a_n} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = b_n + \dfrac{3}{2}$

$b_1 = 1$ より $b_n = 1 + (n-1)\dfrac{3}{2} = \dfrac{3n-1}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{3n-1}}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2a_n + 3}{a_n} = 2 + \dfrac{3}{a_n}$

$b_{n+1} = 3b_n + 2 \implies b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

$b_1 = \dfrac{1}{2}$ より $b_n + 1 = (\dfrac{1}{2} + 1) \cdot 3^{n-1} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^n$

$b_n = \dfrac{3^n - 2}{2}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{3^n - 2}}$

(3) $a_1 = \dfrac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 - 2a_n}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1 - 2a_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_n} - 2$

$b_{n+1} = b_n - 2$

$b_1 = 3$ より $b_n = 3 + (n-1)(-2) = -2n + 5$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{5 - 2n}}$

(4) $S_n = 2a_n - 2n$

$S_1 = 2a_1 - 2 \implies a_1 = 2$

$a_{n+1} = \{2a_{n+1} - 2(n+1)\} - \{2a_n - 2n\}$

$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 2 \implies a_{n+1} = 2a_n + 2$

$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$ より $a_n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 2}$

(5) $S_n = 3a_n - 2^n$

$S_1 = 3a_1 - 2 \implies a_1 = 1$

$a_{n+1} = (3a_{n+1} - 2^{n+1}) - (3a_n - 2^n)$

$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n - 2^n \implies 2a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{3}{4}\alpha + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2$

$b_n = 2 + (\dfrac{1}{2} - 2)(\dfrac{3}{4})^{n-1} = 2 - \dfrac{3}{2}(\dfrac{3}{4})^{n-1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 3^n}$

(6) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{2}{a_n}$

$b_{n+1} = 2b_n + 1 \implies b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

$b_1 = 1$ より $b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$b_n = 2^n - 1$

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- **① 分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$

  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$

  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。

- **② 数列の和 S_n を含む型：**

  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。

  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$,　$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

(2) $S_n = 3a_n - 2$

(3) $a_1 = 1$,　$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

(4) $S_n = 4a_n + n$

(5) $a_1 = \dfrac{1}{5}$,　$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2n$

(6) $S_n = -2a_n + 4n$

解答時間: ＿＿＿＿ 分 ＿＿＿＿ 秒　得点: ＿＿＿＿＿ / 6

逆数型・数列の和の漸化式

一見複雑でも，適切な変形を行えば基本形に帰着できる。

- ① **分数型（逆数型）：** $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$
  $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとる。$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{pa_n + q}{a_n} = p + \dfrac{q}{a_n}$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = qb_n + p$ の形になる。
- ② **数列の和 S_n を含む型：**
  $\Rightarrow$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ を利用して，a_n だけの漸化式を作る。
  $\Rightarrow$ $n = 1$ のときは，$a_1 = S_1$ から値を求める。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$,　$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 1}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = 3 + \dfrac{1}{a_n}$

$b_{n+1} = b_n + 3$

$b_n = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3n-1}}$

(2) $S_n = 3a_n - 2$

$a_1 = 3a_1 - 2 \implies a_1 = 1$

$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n \implies 2a_{n+1} = 3a_n$

$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 1$,　$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n + 2}{2a_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

$b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2}$

$b_n = 1 + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{n+1}}$

(4) $S_n = 4a_n + n$

$a_1 = 4a_1 + 1 \implies a_1 = -\dfrac{1}{3}$

$a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n + 1 \implies 3a_{n+1} = 4a_n - 1$

$a_{n+1} = \dfrac{4}{3}a_n - \dfrac{1}{3} \implies a_{n+1} - 1 = \dfrac{4}{3}(a_n - 1)$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = 1 - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}}$

(5) $a_1 = \dfrac{1}{5}$,　$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2n$

$b_{n+1} - b_n = 2n$

$b_n = 5 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 5 + n(n-1) = n^2 - n + 5$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{n^2 - n + 5}}$

(6) $S_n = -2a_n + 4n$

$a_1 = -2a_1 + 4 \implies a_1 = \dfrac{4}{3}$

$a_{n+1} = -2a_{n+1} + 2a_n + 4 \implies 3a_{n+1} = 2a_n + 4$

$a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{4}{3} \implies a_{n+1} - 4 = \dfrac{2}{3}(a_n - 4)$

$a_n - 4 = (\dfrac{4}{3} - 4)(\dfrac{2}{3})^{n-1}$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n = 4 - \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$