数学 B 数列「漸化式」 (Day4) 前半の復習①

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n - 3$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4n - 1$

(4) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2$

(5) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

数学 B 数列「漸化式」解答　　(Day4) 前半の復習①

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: ___________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n - 3$

公差 -3 の等差数列であるから

$a_n = 2 + (n-1)(-3) = -3n + 5$

$\boldsymbol{a_n = -3n + 5}$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -2a_n$

公比 -2 の等比数列であるから

$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4n - 1$

階差数列が $4n-1$。$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$$

$$= 1 + 2n^2 - 2n - n + 1 = 2n^2 - 3n + 2$$

$n = 1$ のとき $2 - 3 + 2 = 1$ で成立。

$\boldsymbol{a_n = 2n^2 - 3n + 2}$

(4) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 2 \iff \alpha = 1$

$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $4 - 1 = 3$，公比 3 の等比数列。

$a_n - 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 3^n + 1}$

(5) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha + 3 \iff \alpha = -3$

$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$

数列 $\{a_n + 3\}$ は初項 $-1 + 3 = 2$，公比 2 の等比数列。

$a_n + 3 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 2^n - 3}$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1 \iff \alpha = 2$

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

初項 $2 - 2 = 0$ より $a_n - 2 = 0 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = 0$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2}$

数学 B 数列「漸化式」　　(Day4) 前半の復習②

解答時間: ________ 分 ________ 秒　　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

(2) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n - n$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 4^n$

(6) $a_1 = 5, \quad 2a_{n+1} = a_n + 3$

数学 B 数列「漸化式」解答　　(Day4) 前半の復習②

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \iff \alpha = 1$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とすると $b_n - 1 = (\frac{1}{3} - 1)(\frac{2}{3})^{n-1}$

$b_n = 1 - \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = 1 - (\frac{2}{3})^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 3^n - 2^n}$

(2) $a_1 = 0,\quad a_{n+1} = 2a_n - n$

$a_{n+1} - (n+1) - 1 = 2(a_n - n - 1)$ と変形。

数列 $\{a_n - n - 1\}$ は初項 $0 - 1 - 1 = -2$，公比 2 の等比数列。

$a_n - n - 1 = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = -2^n + n + 1}$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2^n$

階差数列が 2^n。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2 + 2^n - 2 = 2^n$

$n = 1$ のときも成立。　$\boldsymbol{a_n = 2^n}$

(4) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

特性方程式 $\alpha = 4\alpha - 6 \iff \alpha = 2$

$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$

$a_n - 2 = (3 - 2) \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 4^{n-1} + 2}$

(5) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 4^n$

両辺を 4^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a_n}{4^n} + \frac{2}{4}$

$\alpha = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2} \iff \alpha = 2$

$b_n - 2 = (\frac{1}{4} - 2)(\frac{3}{4})^{n-1} = -\frac{7}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}$

$a_n = 4^n\{2 - \frac{7}{3}(\frac{3}{4})^n\} = 2 \cdot 4^n - \frac{7}{3} \cdot 3^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 4^n - 7 \cdot 3^{n-1}}$

(6) $a_1 = 5,\quad 2a_{n+1} = a_n + 3$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2} \iff \alpha = 3$

$a_n - 3 = (5 - 3)(\frac{1}{2})^{n-1} = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-2}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = (\frac{1}{2})^{n-2} + 3}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n = (\text{式})$ なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -a_n + 6$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - n^2$

(5) $a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n - 6$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

数学 B 数列「漸化式」解答　　(Day4) 前半の復習③

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n = (\text{式})$ なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 2(a_n + 2n + 3)$ と変形。

数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ は初項 $1 + 2 + 3 = 6$，公比 2 の等比数列。

$a_n + 2n + 3 = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^n - 2n - 3}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -a_n + 6$

$\alpha = -\alpha + 6 \iff \alpha = 3$

$a_n - 3 = (2-3)(-1)^{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n = (-1)^n + 3}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \iff \alpha = -1$

$b_n + 1 = (\frac{1}{2} + 1)(\frac{3}{2})^{n-1} = \frac{3}{2}(\frac{3}{2})^{n-1} = (\frac{3}{2})^n$

$a_n = 2^n\{(\frac{3}{2})^n - 1\} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = 3^n - 2^n}$

(4) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - n^2$

階差数列が $-n^2$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 3 - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$= \frac{18-(2n^3-3n^2+n)}{6} = \frac{-2n^3+3n^2-n+18}{6}$

$\boldsymbol{a_n = \frac{-2n^3+3n^2-n+18}{6}}$

(5) $a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n - 6$

$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - 2$

$\alpha = \frac{1}{3}\alpha - 2 \iff \alpha = -3$

$a_n + 3 = (1+3)(\frac{1}{3})^{n-1} = 4(\frac{1}{3})^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 4(\frac{1}{3})^{n-1} - 3}$

(6) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{2}$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと，公差 $-\frac{3}{2}$ の等差数列。

$b_n = 1 + (n-1)(-\frac{3}{2}) = \frac{5-3n}{2}$

$a_n = 2^n \cdot \frac{5-3n}{2} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = (5-3n)2^{n-1}}$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1～Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ チェックポイント

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 4a_n + 3n - 2$

(2) $a_1 = 5,\quad a_{n+1} = a_n + 2n + 3$

(3) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -2a_n + 3^n$

(4) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

(5) $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = a_n + 4^n$

(6) $a_1 = -2,\quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

解答時間: ________ 分 ________ 秒　得点: __________ / 6

前半の総復習（Day1〜Day3）

漸化式の形を見て，瞬時に解法を判断できるようにしよう。

- **基本形：** 等差・等比・階差数列を見抜く。
- $a_{n+1} = pa_n + q$ **型：** 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を利用。
- n **の式を含む型：** 階差数列の利用，または番号ずらしで変形。
- r^n **を含む型：** 階差数列，または両辺を r^{n+1} で割る。

■ **チェックポイント**

1. $a_{n+1} - a_n =$ (式) なら階差数列。
2. a_n の係数 p が 1 でなければ，特性方程式か「割る」操作を検討。
3. 一般項を求めたら，$n = 1, 2$ を代入して検算する癖をつけよう。

【1】 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 3n - 2$

$a_{n+1} + (n+1) = 4(a_n + n)$ と変形。

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 2，公比 4 の等比数列。

$a_n + n = 2 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - n}$

(2) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 3$

階差数列が $2n+3$。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) = 5 + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 3(n-1)$

$= 5 + n^2 - n + 3n - 3 = n^2 + 2n + 2$

$n = 1$ で $1+2+2=5$ 成立。 $\boldsymbol{a_n = n^2 + 2n + 2}$

(3) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -2a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$\alpha = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$b_n - \frac{1}{5} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{5})(-\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{7}{15}(-\frac{2}{3})^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = \frac{1}{5} \cdot 3^n + \frac{7}{5} \cdot 3^{n-1} \cdot (-2)^{n-1}}$

(4) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

$\alpha = 3\alpha + 2 \iff \alpha = -1$

$a_n + 1 = (1+1) \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1}$

(5) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4^n$

階差数列が 4^n。$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 3 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} = 3 + \frac{4^n - 4}{3} = \frac{4^n + 5}{3}$

$n = 1$ のとき $(4+5)/3 = 3$ 成立。 $\boldsymbol{a_n = \frac{4^n+5}{3}}$

(6) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{2}$

$b_n = -1 + (n-1)(-\frac{3}{2}) = \frac{1-3n}{2}$

$a_n = 2^n \cdot \frac{1-3n}{2} \quad \therefore \boldsymbol{a_n = (1-3n)2^{n-1}}$